

1 积分在函数光滑化中的应用

1.1 函数的磨光

(a) 对任意局部可积函数 f , 通过平均积分来定义

$$f^\delta(x) := \int_{B_\delta(x)} f(y) dy.$$

则有

(i) f 局部可积 $\Rightarrow f^\delta \in C^{0,1}(\mathbb{R})$, 且 $\int_a^b |f^\delta(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$.

(ii) $f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f^\delta \in C^1(\mathbb{R})$, 且 $\sup_{x \in [a,b]} |f^\delta(x) - f(x)| \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$.

练习 1.1 举例说明存在函数列 $\{f_n\}$ 使得 $\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$, 但是 $f_n(x) \not\rightarrow f$. 是否存在 $f_n(x)$ 无处收敛但仍有 $\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$?

(b) 对任意局部可积函数 f , 通过卷积来定义

$$f_\delta(x) := f * \rho_\delta(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) \rho_\delta(x-y) dy,$$

则有 $f_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$. 对任意 $f \in C(\mathbb{R})$, 有 f_δ 局部一致收敛于 f .

练习 1.2 证明: 存在 C 只依赖于 k 和磨光核 ρ 使得

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} f_\delta(x) \right| \leq C \delta^{-k} \sup_{B_\delta(x)} |f|, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

1.2 Hölder 连续函数的积分刻画

(a) f 连续, 内部 $|f^\delta(x) - f(x)| \leq C\delta^\alpha$, “边界 Hölder”, $\Rightarrow$ 整体 Hölder. (定理 1.9)

(b) f 连续, 递减, $f_\delta^-(x) - f(x) \leq C\delta^\alpha$, $\Rightarrow f \in C^\alpha$. (命题 1.10)

(c) Campanato 空间与 Hölder 空间的联系:

$$\mathcal{L}^{p,\mu}[a,b] \simeq \begin{cases} L^{p,\mu}[a,b] & \text{if } 0 \leq \mu < 1, \\ C^\alpha[a,b] & \text{if } 1 < \mu \leq 1+p, \\ \{\text{constants}\} & \text{if } \mu > 1+p, \end{cases} \quad \text{where } \alpha := \frac{\mu-1}{p}.$$

其中 $L^{p,\mu}[a,b]$ 为 Morrey 空间.

2 函数列

2.1 一致收敛

(a) 概念:

(i) $f_n(x)$ 在 I 上逐点收敛于 $f(x)$, 如果 $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0$, 存在 $N = N(x, \varepsilon) > 0$ 使得 $\forall n \geq N$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(ii) $f_n(x)$ 在 I 上**一致收敛**于 $f(x)$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) > 0$ 使得 $\forall n \geq N, \forall x \in I$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(b) 判别法: Cauchy 准则, 最值判别法.

例题 2.1 设 $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, ($n = 1, 2, \dots$), 问: 当 α 取什么值时, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上逐点收敛? 一致收敛呢? 等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ 成立呢?

例题 2.2 设 $f_0 \in R[0, a]$, ($a > 0$), 并定义

$$f_n(x) := \int_0^x f_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

问: 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[0, a]$ 上是否一致收敛?

练习 2.1 设非负函数 $f_0 \in C[0, 1]$, 并定义

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + f_n(t)} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛到某个函数 f , 并求出 f .

例题 2.3 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 且 $|f(x)| < |x|$, $\forall x \neq 0$. 定义 $f_1(x) := f(x)$, $f_2(x) = f(f_1(x))$, $\dots$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, $\dots$. 证明: $f_n(x)$ 在 $[-A, A]$ 上一致收敛 (其中 A 为正常数).

例题 2.4 以下命题是否正确, 如果正确请证明, 错误请举出反例.

- (i) 如果函数列 $\{f_n\}$ 在 E_k ($k = 1, 2, \dots$) 上一致收敛, 那么就在 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上一致收敛.
- (ii) 如果连续函数列逐点收敛到一个连续函数, 那么一定是一致收敛.
- (iii) 存在正整数列 $\{a_n\}$ 和紧集 $E \subset \mathbb{R}$, 使得 $\{\sin a_n x\}$ 在 E 上收敛但不一致收敛.
- (iv) 如果一个函数列一致收敛于一个连续函数, 那么这个函数列一定有连续点.

2.2 等度连续

- (i) $\{f_n(x)\}$ 在 I 上是**等度连续**的, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得 $\forall x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| \leq \delta$, $\forall n$ 有 $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$.
- (ii) 有界区间 I 上, $\{f_n(x)\}$ 等度连续, 且有收敛极限 $f(x)$, 则 $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$. (定理 2.25)
- (iii) 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 f , 且 f_n 都一致连续, 则 $\{f_n(x)\}$ 等度连续. (定理 2.26)

例题 2.5 (Arzelà-Ascoli) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为紧集, 证明: 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点有界且等度连续, 则 $\{f_n\}$ 含有在 E 上一致收敛的子列. 并举例说明:

- (i) 存在紧集上一致有界的连续函数列, 使得其无收敛子列.
- (ii) 存在一致有界且处处收敛的连续函数列, 使得其无一致收敛的子列.
- (iii) 存在一个有界函数列, 其逐点收敛于一个无界函数.

练习 2.2 设 $\{f_n\}$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数列, 且 $f'_n(x)$ 一致有界, $f_n(x)$ 逐点收敛于 $f(x)$. 证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

1 作业讲解

第二部分 1, 2, 3.

2 例题与练习

例题 2.1 设 $\{a_n\}$ 为单调减少的非负数列, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛的充要条件是 $a_n = o(\frac{1}{n})$.

例题 2.2 证明

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

例题 2.3 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $-1 \leq x \leq 1$. 证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, 有

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

练习 2.1 证明

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8}, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}.$$

练习 2.2 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列: $a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2$. 定义

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

求出 f 进而得到 $\{a_n\}$ 的解析表达式.

例题 2.4 设已知幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1, 1)$ 上成立, 如果 $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

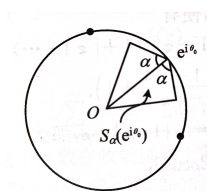
例题 2.5 设复数项级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R = 1$, 且级数在 $z = 1$ 处收敛于 S , 证明: f 在 $z = 1$ 处有非切向极限 S , 即

$$\lim_{S_\alpha(1) \ni z \rightarrow 1} f(z) = S. \quad (S_\alpha(1) \text{ 的定义见下图.})$$

(a) 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

(b) 由此证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \forall \theta \in (0, 2\pi).$$



3 补充: Hölder 空间的刻画

给定 $\alpha \in (0, 1)$, 定义

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) : [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} := \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Hölder 范数定义为

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{esssup}_\Omega |u|$, 即在 Ω 除去一个零测集上 $|u|$ 的上确界.

类似地, 我们有

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} &:= \sum_{j=1}^k \|D^j u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + [D^k u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}, \\ C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) &:= \left\{ u \in C^k(\bar{\Omega}) : \|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

若 $\beta > 0$ 不是整数, 我们记 $C^\beta(\bar{\Omega}) := C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, 其中 $\beta = k + \alpha$, $k \in \mathbb{N}, \alpha \in (0, 1)$. 易知

$$C^0 \supset C^{0,\alpha} \supset C^{0,1} \supset C^1 \supset C^{1,\alpha} \supset \dots \supset C^\infty.$$

以下给出几种刻画 Hölder 连续性的方法, 这在偏微分方程的理论中扮演者重要的角色.

(1) 如果

$$\text{osc}_{B_r(x)} u \leq C_0 r^\alpha \quad \forall B_r(x) \subset \bar{B}_1,$$

其中 $\text{osc}_A u := \sup_A u - \inf_A u$, 那么我们有 $u \in C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)$, $[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(1') 如果

$$\text{osc}_{B_r(x)} u \leq C_0 r^\alpha \quad \forall B_{2r}(x) \subset \bar{B}_1,$$

那么我们有 $u \in C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)$, $[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(2) 令 $u_{x,r} := \int_{B_r(x)} u$. 如果

$$\|u - u_{x,r}\|_{L^\infty(B_r(x))} \leq C_0 r^\alpha \quad \forall B_r(x) \subset \bar{B}_1,$$

那么我们有 $u \in C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)$, $[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(3) 如果

$$\left(\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 \right)^{1/2} \leq C_0 r^\alpha \quad \forall B_r(x) \subset \bar{B}_1,$$

那么我们有 $u \in C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)$, $[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(4) 对任意 $x \in B_1$,

(i) 如果存在 C_x 使得

$$\|u - C_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \leq C_0 r^\alpha \quad \forall B_r(x) \subset \bar{B}_1,$$

那么我们有 $u \in C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)$, $[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{B}_1)} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(ii) 如果存在线性函数 $l_x(y) = a_x + b_x \cdot (y - x)$ 使得

$$\|u - l_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \leq C_0 r^{1+\alpha} \quad \forall B_r(x) \subset \overline{B_1},$$

那么我们有 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$, $[Du]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(iii) 如果存在二次多项式 $P_x(y)$ 使得

$$\|u - P_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \leq C_0 r^{2+\alpha} \quad \forall B_r(x) \subset \overline{B_1},$$

那么我们有 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1})$, $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(5) 固定 $\rho \in (0, 1)$. 如果对任意 $x \in B_{1/2}$, 存在一列二次多项式 $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 使得

$$\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho^k}(x))} \leq C_0 \rho^{k(2+\alpha)} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

那么我们有 $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$, $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha, \rho) > 0$.

(6) 设 $\alpha \in (0, 1)$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_0$.

(i) 如果

$$\sup_{h \in B_1, x \in \overline{B_1 - |h|}} \frac{|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)|}{|h|^\alpha} \leq C_0,$$

那么我们有 $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$, $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$.

(ii) 如果

$$\sup_{h \in B_1, x \in \overline{B_1 - |h|}} \frac{|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)|}{|h|^{1+\alpha}} \leq C_0,$$

那么我们有 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$, $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B_1})} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha) > 0$. 当 $\alpha = 0$ 时, 上面的结果不成立.

(7) 设 $\alpha \in (0, 1]$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_0$. 如果对任意 $h \in B_1$ 有

$$\left\| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^\alpha} \right\|_{C^\beta(B_{1-|h|})} \leq C_0,$$

其中 C_0 不依赖于 h , 并且 $\alpha + \beta$ 不是整数, 那么 $u \in C^{\alpha+\beta}(\overline{B_1})$ 且 $\|u\|_{C^{\alpha+\beta}(\overline{B_1})} \leq CC_0$, 其中 $C = C(n, \alpha, \beta)$. 然而当 $\alpha + \beta$ 是整数时, 上述结论不成立.

(8) 设一列函数 $\{u_i\}$ 满足 $\|u_i\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_0$, 其中 $\alpha \in (0, 1]$, C_0 不依赖于 i . 如果 u_i 在 $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 u . 则 $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 且 $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_0$.

1 作业讲解

第一部分 8; 第二部分 1, 5

2 Frobenius 方法

例题 2.1 讨论微分方程

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

在奇点 $x = 0$ 附近存在幂级数解的可能性.

例题 2.2 求解微分方程

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,$$

事实上, $x = 0$ 为唯一的奇点, 可作变换

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}u,$$

则 $u = u(x)$ 满足

$$u'' + u = 0,$$

他有两个线性无关的解

$$u_1 = \cos x, \quad u_2 = \sin x.$$

于是原方程有两个线性无关的解

$$y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-\frac{1}{2}}, \quad y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

定义 2.1. 称如下形式的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\rho}, \quad (a_0 \neq 0),$$

为广义幂级数, 其中常数 ρ 称为指标, 可取负值或分数. 例如在(1)中, 分别对应于 $x_0 = 0, \rho = -\frac{1}{2}$ 和 $x_0 = 0, \rho = \frac{1}{2}$.

考虑一般的二阶齐次线性微分方程

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0,$$

两边同时除以 $A(x)$, 有

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad \text{其中 } p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}. \quad (2)$$

如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 中至少有一个在 x_0 点不连续, 则称 x_0 为微分方程(2)的奇点, 进一步, 如果 $(x - x_0)p(x)$, $(x - x_0)^2 q(x)$ 可以在 x_0 处 Taylor 展开, 则称其为规则奇点.

定理 2.1. 微分方程(2)在规则奇点 x_0 的邻域内有收敛的广义幂级数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+\rho} \quad (a_0 \neq 0),$$

其中指标 ρ 和系数 $a_k (k \geq 1)$ 可以用代入法确定.

例题 2.3 考虑微分方程

$$2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0.$$

(i) 确定指标 ρ 的所有可能的取值.

(ii) 得到系数 a_k 的递推关系式, 进而得到方程的解.

注 2.1. 当 ρ_1 和 ρ_2 都是实数且 $\rho_1 - \rho_2 = m$ 为正整数或 0 时, 一般不能从 ρ_2 出发得到一个与 ρ_1 不同的广义幂级数解, 此时可以借助下面的(3)来得到另一个与其线性无关的解.

定理 2.2. 设 $y = \varphi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个非零解 (即 $\varphi(x)$ 在 I 上不恒为零), 则方程有通解

$$y = \varphi(x) \left(C_1 + C_2 \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(s)} e^{-\int_0^s p(t) dt} ds \right) \quad (3)$$

例题 2.4 利用 Frobenius 方法来求解以下微分方程:

(i) $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$

(ii) $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0.$

(iii) $x^2 y'' + xy' - xy = 0.$

1 关于作业

算错的同学可以自己再仔细算一算, 本次习题课就不讲作业题了.

$$6. p(x) = (\sqrt{2} - 1)x + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

$$7. p(x) = x^2 + \frac{7}{2}x - 1.$$

$$8. p(x) = \frac{15(e^2-7)}{4e}x^2 + \frac{3}{e}x + \frac{33-3e^2}{4e}.$$

2 练习题

例题 2.1 证明: 区间 I 上的连续函数一定有原函数.

例题 2.2 设 $f \in C^k[0, 1]$, 证明: $B_n(f)^{(i)}(x) \rightarrow f^{(i)}(x)$ uniformly on $[0, 1], i = 0, 1, \dots, k$.

练习 2.1 设 $f \in R[a, b]$, 利用 Weierstrass 逼近定理证明 Riemann-Lebesgue 引理:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin px \, dx = 0, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos px \, dx = 0.$$

练习 2.2 设 $f \in R[a, b]$, 证明: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在两个多项式 $p(x)$ 和 $P(x)$, 使得满足

$$(i) \quad p(x) \leq f(x) \leq P(x), \forall x \in [a, b];$$

$$(ii) \quad \int_a^b [P(x) - p(x)] \, dx < \varepsilon.$$

练习 2.3 设 $f \in C[a, b]$. 证明: 存在关于 n 单调递减的多项式列 $\{P_n\}$ 使得它在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f .

例题 2.3 任意给定整数 $m \geq 0$, 存在 $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$ 使得对任意次数小于 m 的多项式 P , 都有 $\varphi_\varepsilon * P = P$, 其中 $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$.

3 补充

3.1 Müntz 定理

考虑赋范线性空间 $X = C[0, 1]$, 如果集合 $S = \{g_1, g_2, \dots\}$ 中的元素的线性组合在 X 中稠密, 那么则称 S 是**基本的** (fundamental). 换言之, S 是 X 中的基本集, 当且仅当对于任意给定的 $f \in X, \varepsilon > 0$, 都存在 $n, \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ 使得

$$\|f - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i\| < \varepsilon.$$

故 Weierstrass 定理说明了集合 $P := \{1, x, x^2, \dots\}$ 是 $C[0, 1]$ 中的基本集.

一个自然的问题是: $C[0, 1]$ 中其他的基本集长什么样? P 的子集还是不是基本集? 下面的 Müntz 的定理回答了这个问题.

定理 3.1 (Müntz 第一定理). 考虑 $S := \{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$, 其中 $-\frac{1}{2} < \lambda_i \rightarrow +\infty$. 则 S 是 $(C[0, 1], \|\cdot\|_2)$ 中的基本集, 当且仅当 $\sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i} = +\infty$, 其中 $\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$.

定理 3.2 (Müntz 第二定理). 考虑 $S := \{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$, 其中 $1 \leq \lambda_i \rightarrow +\infty$. 则 S 是 $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ 中的基本集, 当且仅当 $\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = +\infty$, 其中 $\|f\|_\infty := \max_{[0, 1]} |f|$.

注 3.1. Müntz 的定理将“删除多少项仍保持基本性”的问题转化为了级数的敛散性的问题.

为了证明上述定理, 需要下面的引理:

引理 3.3. 令 $m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为均大于 $-\frac{1}{2}$ 的各不相同的实数, 记 $M = \text{span}\{x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_n}\}$, d 为在 $\|\cdot\|_2$ 下的距离. 则

$$d(x^m, M) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{j=1}^n \frac{|m - \lambda_j|}{m + \lambda_j + 1}.$$

练习 3.1 以下哪些在 $C[0, 1]$ 是基本的?

- (i) $\{1, x^2, x^4, x^8, \dots\}$.
- (ii) $\{1, x^{p_1}, x^{p_2}, \dots\}$, 其中 p_i 为第 i 个素数.
- (iii) $\{1, x^{p_1}, x^{p_2}, \dots\}$, 其中 $p_n = 10^{10} + n$.

3.2 Weierstrass 定理的 Stone 证明

回顾定理:

定理 3.4. 任意 $f \in C[a, b]$, 都可以由此区间上的多项式逼近.

Stone 的证明递进地依赖于以下引理或事实:

- (a) 对于 $x_1 \neq x_2 \in [a, b]$, 存在 $[a, b]$ 上的连续函数 $\Phi(x)$ 满足: $\Phi(x_1) = 1, \Phi(x_2) = 0$, 且 $\Phi(x)$ 可由 $[a, b]$ 上的多项式逼近.
- (b) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可由多项式一致逼近, 则 $|f(x)|$ 也能.
- (c) 若 $f, g \in C[a, b]$ 可由多项式逼近, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 也在 $[a, b]$ 上连续, 且可由多项式逼近.
- (d) (关键) 设闭集 $Q, M \subset [a, b]$, $Q \cap M = \emptyset$, 存在 $g(x) \in C[0, 1]$ 使得

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in M \end{cases} \quad 0 \leq f_1(x) \leq 1, \forall x \in [a, b],$$

且 $g(x)$ 可由多项式逼近.

证明思路. 对于 $f \in C[a, b]$, 不妨设 $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [a, b]$. 给定 $\varepsilon > 0$, 取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $2/n < \varepsilon$. 考虑

$$M_k := \left\{x \in [a, b] : 0 \leq f(x) \leq \frac{k}{n}\right\}, \quad Q_k := \left\{x \in [a, b] : \frac{k+1}{n} \leq f(x) \leq 1\right\}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

则存在 $f_k(x) \in C[a, b]$ 满足在 Q_k 上 $f_k = 1$, 在 M_k 上 $f_k = 0$, $0 \leq f_k \leq 1$, 且可由多项式逼近. 考虑 $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x)$, 可以证明 $|F_n - f| < \varepsilon/2$, 根据构造 F_n 可由多项式 P 逼近, 从而得证. $\square$

注 3.2. 这种方法源于更一般的 Stone-Weierstrass 定理的证明: 设 X 为任意紧的 Hausdorff 空间, 如果 $C(X, \mathbb{R})$ 的子代数 $\mathcal{A}$ 无处消失且分离点, 那么 $\mathcal{A}$ 在 $C(X, \mathbb{R})$ 中稠密.

1 作业讲解

第一部分 2(4), 6(6), 10

2 练习题

练习 2.1 设 f 是以 2π 为周期的函数, 存在常数 L 和 $\alpha \in (0, 1]$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

证明:

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

练习 2.2 设 f 是以 2π 为周期的函数, 且在 $(0, 2\pi)$ 上可积和绝对可积, 证明:

- (1) 如果 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 单调减少, 那么 $b_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$.
- (2) 如果 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 可导且 f' 在 $(0, 2\pi)$ 上可积和绝对可积, 如果 f' 在 $(0, 2\pi)$ 上单调增加, 则 $a_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$.

练习 2.3 设 f 为区间 $[0, 2\pi]$ 上的凸函数, 证明: $a_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$.

例题 2.1 求下列函数的 Fourier 展开式:

- (1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \frac{\sin nx}{\sin x}, (|\beta| < 1);$
- (2) $f(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x);$
- (3) $f(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x).$

练习 2.4 设 $f(x) = \frac{1}{4}x(2\pi - x), x \in [0, 2\pi]$ 为周期为 2π 的函数, 求其展开的 Fourier 级数, 由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$.

例题 2.2 设 f 为周期 2π 的连续函数, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 定义

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t) \, dt.$$

计算 F 的 Fourier 级数, 并证明 F 的 Fourier 级数一致收敛, 由此推出 f 的 Parseval 等式.

例题 2.3 设 $f \in R[a, b]$. 用 Fourier 展开式证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \, dx.$$

例题 2.4 记 Dirichlet 核

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi \sin \frac{t}{2}} & t \neq 2k\pi, \\ \frac{2n+1}{2\pi} & t = 2k\pi. \end{cases}$$

证明:

$$L_n := \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \, dt = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

3 补充

3.1 Wirtinger 不等式的一个推广

(1) (Wirtinger 不等式) 设 f 为周期为 2π 的函数, $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ 且 $f' \in L^2$. 则有

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx,$$

等号成立当且仅当 $f(x) = a \cos x + b \sin x$, 其中 a, b 为常数.

(2) 设 $r, s, t, q \in \mathbb{Z}$ 满足 $r > \max\{s, t\} \geq 0, q \geq 2$. f 为周期为 2π 的函数, 满足 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. 记

$$f_q(x) := \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q f\left(x + \frac{2k\pi}{q}\right).$$

如果 $f \in C^r[0, 2\pi]$, 则

$$(q^{2(r-t)} - q^{2(s-t)}) \int_0^{2\pi} f_q^{(t)}(x)^2 dx + \int_0^{2\pi} f^{(s)}(x)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x)^2 dx,$$

等号成立当且仅当 $f(x) = a_1 \cos x + a_q \cos(qx) + b_1 \sin x + b_q \sin(qx)$, 其中 a_1, a_q, b_1, b_q 为常数.

1 作业讲解

3

2 补充

2.1 Tauber 型定理

课上我们知道

$$\text{通常求和} \implies \text{Cesàro 求和} \implies \text{Abel 求和}, \quad (4)$$

我们称这种类型的定理为 Abel 型定理, 其他类型的求和方式还有很多, 比如:

(a) 称级数 $\sum a_n$ 可 Borel 求和, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s_n x^n, \quad \text{where } s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

存在. 这种求和方式由 Émile Borel 在 1899 年引入, 产生于复变函数尤其是解析延拓相关理论.

(b) 称级数 $\sum a_n$ 可 Lambert 求和, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L(x^n), \quad \text{where } L(x) := \frac{x \log(1/x)}{1-x}, x \in (0, 1), L(1) := 1 \text{ (Lambert 核)}$$

存在. 在数论中有重要的应用.

练习 2.1 证明: 若级数收敛, 则可 Borel 求和. 特殊地, 如果 $s_n \rightarrow s$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s_n x^n = s$.

练习 2.2 证明对于 Lambert 求和的 Abel 型定理: 如果 $\sum a_n = s$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_n L(x^n) = s$. 在(4)中的关系反过来一般是不成立的, 但是如果加上适当的条件 (Tauber 型条件), 便可从弱的求和推出强, 我们称这种类型的定理为 Tauber 定理, 比如作业第一题 (Tauber 定理)

$$\text{Abel 求和} + \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0 \implies \text{级数收敛}.$$

G. H. Hardy 和 J.E. Littlewood 对其做了推广和延伸 (1910 年代):

定理 2.1 (Hardy). 如果级数 $\sum a_n$ 可 Cesàro 求和, $\{n a_n\}$ 有界, 那么级数收敛.

定理 2.2 (Littlewood). 如果级数 $\sum a_n$ 可 Abel 求和到 A , $\{n a_n\}$ 有界, 则级数收敛到 A .

定理 2.3 (Hardy-Littlewood). 如果级数 $\sum a_n$ 可 Abel 求和到 A , $s_n \geq 0$, 则级数 Cesàro 求和到 A .

注 2.1. 在 Hardy-Littlewood 中, 可以假设更一般的 $s_n \geq -C$. 在 Littlewood 定理中, $\{n a_n\}$ 的有界性可以被替换为一边有界: $a_n \geq -C/n$. 上述定理的最初证明都是相当复杂的, 直到近 20 年过去, 在 1930 年 Karamata 给出了相对初等的证明, 我们采用其证明.

2.2 等分布问题

定义 2.1. 考虑 $[0, 1)$ 区间上的数列 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$, 如果对任意的 $a, b \in [0, 1)$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n \mid \xi_k \in [a, b]\}|}{n} = b - a,$$

则称 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $[0, 1)$ 上是等分布的.

注 2.2. 等分布蕴含稠密, 反之不对.

(a) $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分. 对任意的有理数 q , 数列 $\{\{k \cdot q\}\}_{k \geq 1}$ 不是等分布的;

(b) 给定无理数 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, 数列 $\{\{k \cdot \alpha\}\}_{k \geq 1}$ 是等分布的.

注意到, 等分布性等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(\xi_k) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx.$$

定理 2.4 (Weyl 的等分布判别准则). $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 是 $[0, 1)$ 区间上的数列. 那么, $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $[0, 1)$ 上等分布当且仅当对任意的 $\ell \neq 0$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \ell \xi_k} \right) = 0.$$

练习 2.3 判断以下数列 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 是否等分布.

(1) 任给非零实数 a , 任意的实数 $\sigma \in (0, 1)$, 令 $\xi_k = \{ak^\sigma\}$ (小数部分).

(2) 任意给定 $a \in \mathbb{R}$, 对任意的 $k \geq 1$, 定义 $\xi_k = \{a \log(k)\}$.

1 讲解

考试题选讲

2 补充：关于等周不等式

我们知道，对于平面上可求长的 Jordan 曲线 C ，记 L 为周长， A 为所围的面积，则有

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

等号成立当且仅当 C 是一个圆.

我们引入以下概念. 设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 为凸体 (convex body), H 为 $\mathbb{R}^d$ 中的超平面 (hyperplane). 称 H 是 K 的支撑平面 (support plane), 如果 $K \cap H \neq \emptyset$, 但至少有一个由 H 决定的两个半空间之一不包含 K 的点. 对于 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, 定义 $h_K(u)$ 为 K 的支撑函数 (support function), 如果超平面 $H_K(u) := h_K(u)u + \langle u \rangle^\perp$ 是 K 的支撑平面且 $K \subset h_K(u)u + \langle u \rangle^\perp$, 其中 $\langle u \rangle^\perp$ 表示与 u 正交的线性子空间, $\langle u \rangle^\perp := \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot u \leq 0\}$. 容易验证

$$h_K(u) = \sup\{u \cdot p : p \in K\}.$$

对于两个凸体 K, L , Hausdorff 距离 $\delta(K, L)$ 定义为

$$\delta(K, L) := \inf\{r : K \subset L_{(r)}, L \subset K_{(r)}\},$$

其中 $L_{(r)} := K + rB_1$, 可视作凸体 L 的 r -邻域. 容易验证

$$\delta(K, L) = \|h_L - h_K\|_\infty = \sup\{|h_L(u) - h_K(u)| : u \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

基于此, 我们可以定义凸体间的 L^2 -距离 $\delta_2(K, L)$:

$$\delta_2(K, L) := \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (h_K(u) - h_L(u))^2 dS \right)^{1/2} = \|h_K - h_L\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

以下只考虑 $d = 2$. 记 $u = (\cos \omega, \sin \omega)$, 定义凸体 K 的 Steiner 点 $z(K)$ 为

$$z(K) := \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_K(\omega) \cos \omega d\omega, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_K(\omega) \sin \omega d\omega \right).$$

K 的 Steiner 圆盘定义为

$$B_z(K) := B\left(z(K), \frac{L(K)}{\pi}\right), \quad L(K) \text{ 表示 } K \text{ 的周长}.$$

定理 2.1. 令 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为凸区域, 支撑函数为 h_K . 如果

$$h_K(\omega) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega),$$

那么面积 $A(K)$, 周长 $L(K)$, Steiner 点 $z(K)$ 和 Steiner 圆盘 $B_z(K)$ 的支撑函数 $h_{B_z(K)}(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} A(K) &= \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2), \\ L(K) &= 2\pi a_0, \\ z(K) &= (a_1, b_1), \\ h_{B_z(K)}(\omega) &= a_0 + a_1 \cos \omega + b_1 \sin \omega. \end{aligned}$$

进一步, 如果有另一个凸区域 L 有支撑函数 h_L ,

$$h_L(\omega) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cos k\omega + d_k \sin k\omega),$$

那么 K 和 L 的混合面积 $A(K, L)$ 和 L_2 -距离 $\delta_2(K, L)$ 为

$$\begin{aligned} A(K, L) &= \pi a_0 c_0 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1)(a_k c_k + b_k d_k), \\ \delta_2(K, L)^2 &= 2\pi(a_0 - c_0)^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k - c_k)^2 + (b_k - d_k)^2]. \end{aligned}$$

注 2.1. 设 $K, L \subset \mathbb{R}^d$ 是两个凸体 (非空紧凸集), 它们的混合体积 $V(K, L)$ 定义如下.

对于 $t \geq 0$, Minkowski 和为 $K + tL = \{x + ty \mid x \in K, y \in L\}$. 其 d 维体积 $\text{vol}_d(K + tL)$ 是 t 的 d 次多项式:

$$\text{vol}_d(K + tL) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V(\underbrace{K, \dots, K}_{d-i}, \underbrace{L, \dots, L}_i) t^i,$$

其中系数 $V(K, \dots, K, L, \dots, L)$ 称为混合体积. 当 $d = 2$ 时, 对于 K 和 L 的混合面积 $A(K, L)$, 我们将会用到

$$A(K, L) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h_K(\omega)h_L(\omega) - h'_K(\omega)h'_L(\omega)) d\omega.$$

定理 2.2. 令 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为凸区域, 面积为 $A(K)$, 周长为 $L(K)$. 则

$$L(K)^2 - 4\pi A(K) \geq 6\pi \delta_2(K, B_z(K))^2,$$

其中 $B_z(K)$ 为 K 的 Steiner 圆盘. 等号成立当且仅当 K 的支撑函数可写为以下形式:

$$a_0 + a_1 \cos \omega + b_1 \sin \omega + a_2 \cos 2\omega + b_2 \sin 2\omega.$$

参考文献

- [Gr] H. Groemer, *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 61, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996; MR1412143

数学分析 II (实验班) 2025-2026 春季学期期中考试试题

1. (10 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ 的和.

2. (10 分) 假设凸函数 $f \in C^2[0, 1]$ 满足 $f''(x) \geq m > 0$. 证明: Bernstein 多项式

$$B_n f(x) \geq f(x) + \frac{mx(1-x)}{2}.$$

3. (12 分) 证明

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

4. (12 分) 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin nx}{2\sqrt{n+\cos x}}$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内闭一致收敛.

5. (12 分) 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln x)^{\frac{1}{n}}}{n}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的收敛性.(包括逐点收敛, 一致收敛, 内闭一致收敛性等)

6. (12 分) 对 $f \in R[-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

定义级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx).$$

记 $\varphi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$. 证明: 若在 x 满足 $\int_0^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{t} dt < +\infty$ 收敛, 则上述级数在 x 处收敛.

7. (12 分) 令 $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 中的所有有理数. 定义

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} |x - r_n|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

证明: f 的 Fourier 级数在 $(-\pi, \pi)$ 中收敛到 $f(x)$.

8. (20 分) 设 $f \in C[a, b]$ 满足: 存在 $p, \mu, C_0 > 0$, 使得 $\forall x \in [a, b], 0 < \delta < b - a$,

$$\left(\delta^{-\mu} \int_{x_{\delta,-}}^{x_{\delta,+}} |f(t) - f_{x,\delta}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_0,$$

其中

$$f_{x,\delta} := \frac{1}{x_{\delta,+} - x_{\delta,-}} \int_{x_{\delta,-}}^{x_{\delta,+}} f(t) dt, \quad x_{\delta,-} := \max\{a, x - \delta\}, \quad x_{\delta,+} := \min\{b, x + \delta\}.$$

证明: 当 $\mu > 1 + p$ 时, f 为常值函数.

参考答案

1. (10 分) 记 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, 其中 $a_n = \frac{1}{3n-1}$ 单调减小, 由 Leibniz 判别法, 级数收敛, 记为 S . 易知幂级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n-1}}{3n-1}$$

的收敛域为 $(-1, 1]$. (首先计算收敛半径为 1, 在 $x = 1$ 处收敛, 在 $x = -1$ 处发散) 应用 Abel 第二定理 (讲义定理 4.20(2)) 得 $S = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$. 注意到 $S(0) = 0$, 有

$$S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t) dt, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

逐项微分得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{3n-2} = x^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{-x}{1+x^3}.$$

于是

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{-t}{1+t^3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t+1}{t^2-t+1} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{\frac{3}{2}}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

从而有

$$S = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi.$$

2. (10 分) 记

$$B_{k,n} := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

由 Taylor 公式, 对任意 $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, 存在介于 x 和 $\frac{k}{n}$ 的 ξ_k 使得

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_k) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

注意到 $\sum_{k=0}^n B_{k,n} = (1-x+x)^k = 1$. 考虑 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, 视 y 为常数, 两边关于 x 求导, 得

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k},$$

两边乘 x , 并取 $y = 1-x$, 得

$$nx = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \text{即} \quad \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) B_{k,n} = 0.$$

类似地, 对 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ 关于 x 求 2 阶导, 然后两边乘以 x^2 , 有

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

取 $y = 1 - x$ 可得

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

于是有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n [k(k-1) + k] B_{n,k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^n k B_{n,k} + x^2 \\ &= \frac{n(n-1)x^2 + nx}{n^2} - \frac{2x}{n} nx + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

于是由 Bernstein 多项式定义, 结合上面所得, 有

$$\begin{aligned} B_n f(x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= f(x) \sum_{k=0}^n B_{k,n} + f'(x) \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) B_{k,n} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n f''(\xi_k) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{k,n} \\ &\geq f(x) + \frac{m}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{k,n} = f(x) + \frac{mx(1-x)}{2n}. \end{aligned}$$

3. (12 分) 习题课讲过.

4. (12 分) 记 $u_n(x) = \sin nx, v_n(x) = \frac{x}{2\sqrt{n+\cos x}}$, 部分和 $S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$. 任取 $\delta > 0$, 考虑 $x \in (-2\pi + \delta, 2\pi - \delta)$. 对于 $x \neq 0$, 有

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \sin(x) = \frac{\cos x - \cos(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

考虑 $f(t) = \frac{x}{2\sqrt{t+\cos x}}$, 关于 t 求导有

$$f'(t) = \frac{-x}{\sqrt{t}(2\sqrt{t+\cos x})^2}.$$

故当 $x > 0$ 时, $v_n(x)$ 关于 n 减小, 当 $x < 0$ 时, $v_n(x)$ 关于 n 增加. 由 Abel 变换, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n(x) v_n(x) &= \sum_{n=N+1}^{N+p} (S_n - S_{n-1}) v_n(x) = \sum_{n=N+1}^{N+p} S_n v_n - \sum_{n=N}^{N+p-1} S_n v_{n+1} \\ &= S_{N+p} v_{N+p} + \sum_{n=N+1}^{N+p-1} S_n (v_n - v_{n+1}) - S_N v_{N+1} \end{aligned}$$

故有 (或直接应用 Abel 引理)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n(x) v_n(x) \right| &\leq \left| \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| (|v_{N+1}(x)| + 2|v_{N+p}(x)|) \\ &\leq \left| \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \right| \frac{3|x|}{2\sqrt{N}-1} \leq C \frac{1}{2\sqrt{N}-1} \rightarrow 0, \quad \text{as } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故在 $(-2\pi, 2\pi)$ 上内闭一致收敛.

5. (12 分) (i) 逐点收敛性: 注意到 $\frac{(\ln x)^{\frac{1}{n}}}{n}$ 关于 n 单调且收敛到 0, 事实上, $(\ln x)^{\frac{1}{n}}$ 单调收敛到 1, $\frac{1}{n}$ 单调收敛到 0, 从而得到, 或令 $a_n := \frac{(\ln x)^{\frac{1}{n}}}{n}$ 为正项级数, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{n+1}}}{n+1} \frac{n}{(\ln x)^{\frac{1}{n}}} = (\ln x)^{-\frac{1}{n(n+1)}} \frac{n}{n+1} < 1.$$

由 Leibniz 判别法知, 当 $x > 1$, 逐点收敛.

(ii) 一致收敛性: 假设一致收敛, 则一致收敛到 0, 但注意到

$$\sup_{x \in (1, +\infty)} \frac{(\ln x)^{\frac{1}{n}}}{n} + \infty, \quad (\text{或取点列 } x_n = e^{n^n}, \text{ 则 } \frac{(\ln x_n)^{\frac{1}{n}}}{n} \equiv 1),$$

矛盾.

(iii) 内闭一致收敛性: $\forall (a, b) \subset (1, +\infty)$, $\forall x \in (a, b)$, 有 $\ln x \leq \ln b$. 于是

$$0 \leq a_n = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{n}}}{n} \leq \frac{(\ln b)^{\frac{1}{n}}}{n} \rightarrow 0.$$

由 Dirichlet 判别法知一致收敛, 故其内闭一致收敛.

6. (12 分) 设 $f \in R[-\pi, \pi]$, 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx)$ 的部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-b_k \cos kx + a_k \sin kx).$$

利用系数表达式, 有

$$-b_k \cos kx + a_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k(x-t)) dt.$$

因此

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=1}^n \sin(k(x-t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n^*(u) du,$$

其中 $u = x - t$, $D_n^*(u) = \sum_{k=1}^n \sin(ku)$. 由于 $D_n^*(u)$ 是奇函数, 将积分区间对称化可得

$$S_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(u) D_n^*(u) du,$$

这里 $\varphi_x(u) = f(x+u) - f(x-u)$. 利用恒等式

$$D_n^*(u) = \frac{\cos \frac{u}{2} - \cos((n+\frac{1}{2})u)}{2 \sin \frac{u}{2}},$$

代入得

$$S_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(u) \cot \frac{u}{2} du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_x(u)}{\sin \frac{u}{2}} \cos((n+\frac{1}{2})u) du.$$

记 $g(u) = \frac{\varphi_x(u)}{\sin \frac{u}{2}}$. 由条件 $\int_0^{\pi} \left| \frac{\varphi_x(u)}{u} \right| du < \infty$ 及 $\sin \frac{u}{2} \sim \frac{u}{2}$ ($u \rightarrow 0^+$) 知 $g(u)$ 在 $[0, \pi]$ 上绝对可积. 于是根据 Riemann-Lebesgue 引理, 第二项积分当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 0. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(u) \cot \frac{u}{2} du,$$

即原级数在 x 处收敛.

7. (12 分) 注意到 $2^{-n}|x - r_n|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} \leq 2^{-n}(2\pi)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} \leq 2^{-n}(2\pi)^{\frac{3}{2}}$, 由 Weierstrass M-判别法知级数一致收敛, 且每一项连续, 从而 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续. 我们只需证明 f 是 Hölder 连续的. $\forall x, y \in [-\pi, \pi]$, 记 $h := |x - y|$. 令 $g_n(t) = 2^{-n}|t - r_n|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}$.

(i) 当 $|x - r_n| \geq 2h$ 且 $|y - r_n| \geq 2h$ 时, 我们不妨设 $x < y$. 则

$$|g'_n(t)| = 2^{-n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) |t - r_n|^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}, \quad \forall t \in [x, y].$$

注意到此时 $|t - r_n| \geq h$, 从而

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq 2^{-n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) h^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} h \leq 2^{-n} h^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}.$$

(ii) 当 $|x-r_n| < 2h$ 或 $|y-r_n| < 2h$ 时,不妨设 $|x-r_n| < 2h$, 则 $|y-r_n| \leq |y-x|+|x-r_n| < 3h$. 此时有

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq |g_n(x) + g_n(y)| \leq 2^{-n} \left[(2h)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} + (3h)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \right] \leq 10 \cdot 2^{-n} h^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}.$$

(iii) 综上所述可知,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x) - g_n(y)| \leq 10 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \leq Ch^{\frac{1}{2}} = C|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

8. (20 分) 参见讲义.

数学分析 II (实验班) 2025-2026 春季学期期末考试试题

1. (10 分) 判断极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y^2) + \tan(x^2+y) - x - y}{\arcsin(x^2+y^2)}$$

是否存在. 若存在, 求出极限; 若不存在, 说明理由.

2. (10 分) 构造一个函数, 使得沿每一条曲线 $y = k \tan x (k \in \mathbb{R})$ 趋于原点时极限都存在且相等, 但重极限不存在.

3. (20 分) (1) 假设函数 $y = y(x)$ 由

$$\int_0^y e^{xt} dt + \int_x^{y^2} \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

确定. 求 $\frac{dy}{dx}$ 在 $x = 0, y = 0$ 出的值.

(2) 假设向量值函数

$$\vec{F}(x, y, z, w) = (x + y + z + w, xy + zw, xyz + yzw + xzw + xyw)^T$$

证明在 $(1, 0, 0, -1)$ 附近满足 $\vec{F}(x, y, z, w) = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ 的 y, z, w 可以表示为 x 的可微函数, 并求

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}_{x=1}.$$

4. (10 分) 设 $u(x, y)$ 为上半平面 $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ 上为光滑凸函数, 且满足

$$\det D^2 u = (1 + y)^{-\frac{4}{3}} > 0$$

定义 u 的关于 x 方向的部分 Legendre 变换 $u^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$u^*(\xi, \eta) = xu_x(x, y) - u(x, y)$$

其中 $(\xi, \eta) = (u_x, y)$. 令 $v(x_1, x_2) = u^*(x_1, f(x_2))$, 其中 $f(x_2) = \left(\frac{x_2}{3}\right)^3 - 1$. 证明 v 满足:

$$\operatorname{div}(x_2^{-2} \nabla v) = 0.$$

5. (20 分) 计算积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz$, Ω 是由平面 xOy 上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域;

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

6. (10 分) 确定 α, β 为何值时,

$$\iint_{(0,+\infty) \times (0,+\infty)} \frac{dx dy}{(x+y)^\alpha (1+x+y)^\beta}$$

收敛.

7. (10 分) 设 $s \geq 0$,

$$f(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)} dx$$

求 $f(1)$.

8. (10 分) 设

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) \cdot \arctan(yt)}{t^2} dt$$

其中 $x > 0$, $y > 0$. 计算 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

参考答案

1.(10 分) 令 $u = x + y^2$, $v = x^2 + y$ 。当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ 且 $u, v \rightarrow 0$ 。由 Taylor 公式,

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3), \quad \tan v = v + \frac{v^3}{3} + o(v^3)$$

又有

$$u^3 = x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6 = x^3 + o(\rho^3) \quad v^3 = y^3 + o(\rho^3).$$

因此

$$\begin{aligned} \sin(x + y^2) + \tan(x^2 + y) - x - y &= [x + y^2 - \frac{x^3}{6} + o(\rho^3)] + [x^2 + y + \frac{y^3}{3} + o(\rho^3)] \\ &= x^2 + y^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{3} + o(\rho^3). \end{aligned}$$

再令 $t = x^2 + y^2$, $t \rightarrow 0$ 时,

$$\arcsin t = t + o(t) = x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)$$

所以原极限即

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{3} + o(\rho^3)}{x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \frac{x^3 - 2y^3}{6(x^2 + y^2)} + o(\rho)}{1 + o(1)} = 1.$$

2.(10 分) (答案不唯一) 取

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y - \tan x)^2}{(y - \tan x)^2 + x^6}, & y \neq \tan x \\ 1, & y = \tan x. \end{cases}$$

则

- $k \neq 1$ 时,

$$f(x, k \tan x) = \frac{(k-1)^2 \tan^2 x}{(k-1)^2 \tan^2 x + x^6} = \frac{(k-1)^2 x^2 + o(x^2)}{(k-1)^2 x^2 + x^6 + o(x^2)} \rightarrow 1$$

- $k = 1$ 时, $f(x, \tan x) = 1$ 。

但沿着 $y = \tan x + x^3$, 极限为 $\frac{1}{2}$, 重极限不存在.

3. (20 分) (1) 求导得

$$y' e^{xy} + \int_0^y t e^{xt} dt + \frac{2yy'}{1+y^4} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$x = 0$, $y = 0$ 代入得, $y'(0) = 1$.

(2)

$$\vec{F}(1, 0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 + 0 + 0 - 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

计算关于未知量 (y, z, w) 的 Jacobi 矩阵:

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(y, z, w)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & w & z \\ xz + zw + xw & xy + yw + xw & yz + xz + xy \end{pmatrix}.$$

在 $(1, 0, 0, -1)$ 处,

$$A := D_{(y, z, w)} \vec{F}(1, 0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其行列式为 $\det A = -2 \neq 0$. 所以由隐函数定理, 存在 $x = 1$ 附近的可微函数

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad w = w(x),$$

使得

$$\vec{F}(x, y(x), z(x), w(x)) = \vec{0}.$$

对上式关于 x 求导:

$$F_x + A \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = 0.$$

又

$$F_x = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ yz + zw + yw \end{pmatrix},$$

故在 $(1, 0, 0, -1)$ 处

$$F_x(1, 0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'(1) \\ z'(1) \\ w'(1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

写成方程为

$$\begin{cases} y'(1) + z'(1) + w'(1) = -1, \\ y'(1) - z'(1) = 0, \\ -y'(1) - z'(1) = 0. \end{cases}$$

由后两式得 $y'(1) = z'(1) = 0$, 再由第一式得 $w'(1) = -1$. 所以

$$\left. \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right|_{x=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.(10 分) 由 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_{xx}} & -\frac{u_{xy}}{u_{xx}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以计算

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{\star} &= x, \quad u_{\eta}^{\star} = -u_y, \\ u_{\xi\xi}^{\star} &= \frac{1}{u_{xx}}, \quad u_{\eta\eta}^{\star} = -\left[u_{yx} \left(-\frac{u_{xy}}{u_{xx}} \right) + u_{yy} \right] = -\frac{\det D^2 u}{u_{xx}}, \quad u_{\xi\eta}^{\star} = -\frac{u_{xy}}{u_{xx}} \end{aligned}$$

由于

$$\det D^2 u = (1 + y)^{-4/3} = (1 + \eta)^{-4/3},$$

故

$$u_{\eta\eta}^{\star} = -u_{\xi\xi}^{\star} (1 + \eta)^{-4/3}.$$

即 $u^{\star}$ 满足

$$(1 + \eta)^{\frac{4}{3}} u_{\eta\eta}^{\star} + u_{\xi\xi}^{\star} = 0$$

令

$$\eta = f(x_2) = \left(\frac{x_2}{3} \right)^3 - 1.$$

则

$$f'(x_2) = \frac{x_2^2}{9}, \quad 1 + \eta = \left(\frac{x_2}{3} \right)^3, \quad (1 + \eta)^{\frac{4}{3}} = \frac{x_2^4}{81}.$$

注意原函数 u 定义在 $y > 0$ 上, 而 $\eta = y$, 所以需要

$$\eta = f(x_2) > 0 \iff x_2 > 3.$$

现在

$$v(x_1, x_2) = u^{\star}(x_1, f(x_2)).$$

于是

$$v_{x_1} = u_{\xi}^{\star}, \quad v_{x_2} = u_{\eta}^{\star} f'(x_2).$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(x_2^{-2}\nabla v) &= \partial_{x_1}(x_2^{-2}v_{x_1}) + \partial_{x_2}(x_2^{-2}v_{x_2}) \\ &= x_2^{-2}u_{\xi\xi}^* + \partial_{x_2}(x_2^{-2}f'(x_2)u_\eta^*).\end{aligned}$$

而

$$x_2^{-2}f'(x_2) = x_2^{-2} \cdot \frac{x_2^2}{9} = \frac{1}{9},$$

故

$$\partial_{x_2}(x_2^{-2}f'(x_2)u_\eta^*) = \frac{1}{9}\partial_{x_2}u_\eta^* = \frac{1}{9}U_{\eta\eta}f'(x_2) = \frac{x_2^2}{81}u_{\eta\eta}^*.$$

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(x_2^{-2}\nabla v) &= x_2^{-2}u_{\xi\xi}^* + \frac{x_2^2}{81}u_{\eta\eta}^* = x_2^{-2}\left(u_{\xi\xi}^* + \frac{x_2^4}{81}u_{\eta\eta}^*\right) \\ &= x_2^{-2}\left(u_{\xi\xi}^* + (1+\eta)^{\frac{4}{3}}u_{\eta\eta}^*\right) = 0.\end{aligned}$$

证毕.

5. (20 分) (1) 曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转, 得到 $y^2 + z^2 = 2x$. 令 $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. 则区域为

$$0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2x}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

且 $y^2 + z^2 = r^2, dydz = r dr d\theta$. 因此

$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2x}} r^2 \cdot r dr d\theta dx = \frac{250\pi}{3}.$$

(2) 先化为重积分

$$\begin{aligned}I &= \iiint_{x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 1} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \pi \int_1^2 \sqrt{r^2 + z^2} \Big|_0^{\sqrt{1-(z-1)^2}} dz \\ &= \pi \int_1^2 \left(\sqrt{1 - (z-1)^2} + z^2 - z \right) dz \\ &= \pi \int_1^2 (\sqrt{2z} - z) dz \\ &= \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6} \pi.\end{aligned}$$

6. (20 分) 做变换 $s = x + y, t = x$. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = 1$. 则区域变为 $\{(t, s) \mid 0 < t < s < \infty\}$.

$$I = \int_0^\infty \int_0^s s^{-\alpha} (1+s)^{-\beta} dt ds = \int_0^\infty s^{1-\alpha} (1+s)^{-\beta} ds$$

瑕积分 $\alpha < 2$ 时收敛, 无穷积分 $\alpha + \beta > 2$ 时收敛. 则 $\alpha < 2$ 且 $\alpha + \beta > 2$ 时积分收敛.

7. (10 分) 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) \leq C\sqrt{x}$. 这推出

$$\frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)} \leq \frac{C\sqrt{s}}{1+x^2}, \quad x > 0, s \geq 0.$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1+sx^2}{x(1+x^2)} dx$ 关于 $s \in [0, +\infty)$ 内闭一致收敛。所以 $f \in C[0, +\infty)$. 又

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+sx^2)} \leq \frac{1}{2\sqrt{s}(1+x^2)}, \quad x > 0, s > 0$$

可知求导后积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+sx^2)} dx$$

关于 $s \in (0, +\infty)$ 内闭一致收敛。所以 f 在 $(0, +\infty)$ 内连续可导且

$$\begin{aligned} f'(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+sx^2)} dx = \frac{1}{1-s} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} - \frac{sx}{1+sx^2} dx \\ &= \frac{1}{2(1-s)} \ln \frac{1+x^2}{1+sx^2} \Big|_{x=0}^{\infty} = -\frac{\ln s}{2(1-s)}. \end{aligned}$$

再结合 $f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f(1) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln s}{1-s} ds = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1-s)}{s} ds = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{\ln(1-s)}{2s} ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^{n-1}}{2n} ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1-\epsilon} \frac{s^{n-1}}{2n} ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\epsilon)^n}{2n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

8. (10 分) 被积函数对 $x > 0, y > 0$ 有连续的偏导数, 且积分关于参数一致收敛, 故可在积分号下求导。对 x 求偏导:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\arctan(xt) \cdot \arctan(yt)}{t^2} \right) = \frac{\arctan(yt)}{t^2} \cdot \frac{t}{1+x^2t^2}$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(yt)}{t^2} \cdot \frac{t}{1+x^2t^2} dt$$

再对 y 求偏导书

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} dt$$

当 $x = y$ 时, 则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)^2} = \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4x}.$$

当 $x \neq y$ 时,

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} = \frac{1}{y^2-x^2} \left(\frac{y^2}{1+y^2t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right)$$

利用

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2t^2} dt = \frac{\pi}{2a}$$

得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y^2 - x^2} \left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) = \frac{\pi}{2(x+y)}.$$

综上

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\pi}{2(x+y)}.$$