北京大学数学科学学院 2025 秋偏微分方程期中考试

1. (20 分) 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数.

   (a) 证明平均值公式成立.

   (b) 设存在实数 $M>0$ 使得 $u \geq -M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. 证明 u 在 $\mathbb{R}^n$ 上为常数.

2. (14 分) 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 B_1 上的调和函数，$\varphi(s)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负凸函数. 证明

$$\Phi(r) := \fint_{\partial B_r} \varphi(u(x))\,\mathrm{d}S(x), \quad r \in (0,1)$$

   是关于 r 的单调递增函数.

3. (20 分)

   (a) 设 $g(x) \in C(\mathbb{R})$ 且 $|g(x_1)-g(x_2)| \leq C|x_1-x_2|^\alpha, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 其中 $\alpha \in (0,1)$, C 为正常数. 利用 Green 函数求上半平面上的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x \in \mathbb{R}, y>0, \\ u(x,0)=g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   的一个古典解 $u(x,y)$.

   (b) 设 $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，利用 Fourier 变换方法求上述边值问题的一个古典解 $u(x,y)$，并判断上述边值问题的古典解是否唯一.

4. (14 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域. $u(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是第三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + 3u = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + 3u = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

   的一个解，其中 $a_i = a_i(x) \in C(\Omega)(i=1,1,\cdots,n)$ 为给定函数. 证明：

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| \leq \frac{1}{3}\max\{\max_{\partial\Omega}|g(x)|, \sup_{\Omega}|f(x)|\}.$$

5. (12 分)

   (a) 求函数 $f(x)=e^{-|x+2|}+\frac{1}{1+x^2}$ 的 Fourier 变换.

   (b) 求函数 e^{-2x^2} 与 $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的卷积.

6. (20 分) 设 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ 且 $\operatorname{spt} f \subset [-M,M]\times[m,M]$, 其中 $M>m>0$.

   (a) 用 Fourier 变换求解初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = f, & (x,t) \in \mathbb{R}_+^2, \\ u(x,0)=0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (b) 证明所得的形式解是上述初值问题的古典解.

北京大学数学科学学院 2025 秋偏微分方程期末考试

1. (15 分) 设 $u(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，满足

$$|u(x)| \le C|x|\ln(1+|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 C 正常数. 证明：$u(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

2. (15 分) 记 $Q = (0,l)\times(0,T]$. 设 $u \in C^{1,0}(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ 是热方程混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l], \\ u_x(0,t) = g_1(t),\ u_x(l,t) = g_2(t), & t \in [0,T] \end{cases}$$

的解，其中 $f(x,t) \in C(Q)$, $\varphi(x) \in C([0,l])$, $g_1(t), g_2(t) \in C([0,T])$. 证明

$$\max_{\overline{Q}} |u| \le C(F+B),$$

其中 $C = C(a,T,l) > 0$,

$$F = \sup_Q |f|,\ B = \max\{\max_{[0,l]}|\varphi|, \max_{[0,T]}|g_1|, \max_{[0,T]}|g_2|\}.$$

3. (20 分) 考虑热方程混合问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t), & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,\pi], \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & t \in [0,+\infty). \end{cases}$$

(1) 求出上述问题的 Green 函数 $G(x,t;\xi,\tau)$ 和解 $u(x,t)$ 的表达式.

(2) 当 $\varphi(x) \in C_0^1([0,\pi])$, $f(x,t) \equiv 0$ 时，证明所得表达式是上述混合问题的古典解，并求 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$.

(3) 证明上述问题的 Green 函数 $G(x,t;\xi,\tau)$ 的非负性.

4. (15 分) 设 $\varphi(t), \psi(t) \in C^2([0,+\infty))$ 满足 $\varphi(0) = \psi(0)$. 利用特征线法求解 Darboux 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, \\ u(0,t) = \varphi(t),\ u(t,t) = \psi(t), & t \ge 0, \end{cases}$$

并证明所得到的形式解是问题的古典解.

5. (15 分) 设 $u(x,t) \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ 满足一维波动方程半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \ge 0, \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

证明能量不等式

$$\int_0^{x_0} \left[u_t^2(x,t_0) + a^2 u_x^2(x,t_0)\right]\,\mathrm{d}x \le M\left(\int_0^{x_0+at_0}\left[\psi^2(x) + a^2|\varphi'(x)|^2\right]\,\mathrm{d}x + \int_0^{t_0}\int_0^{x_0+a(t_0-t)} f^2(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right),$$

其中 $x_0, t_0 \in \mathbb{R}_+$, $M = M(t_0) > 0$.

6. (20 分) 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 和 $h(x)$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的调和函数, $g(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数. 设 $u = u(x,t)$ 是二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = g(t)h(x), & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

的解.

(1) 利用已知的二维波动方程初值问题解的表达式求出

$$u(x,t) = \varphi(x) + t\psi(x) + \left(\int_0^t (t-s) g(x) \, \mathrm{d}s \right) h(x),$$

并证明其为初值问题的一个古典解.

(2) 证明此波动方程初值问题解的唯一性.